Chapitre 4. Systèmes linéaires et calcul matriciel

Maths SUP

OPTIMAL *SUP-SPE*

Fiche de cours

Dans tout le cours, $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

A. Calcul matriciel

I. Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définitions

■ Soient n et p deux entiers naturels non nuls. On appelle matrice à n lignes et p colonnes ou matrice (n, p) à coefficients dans $\mathbb{K}$, toute application A de $[1, n] \times [1, p]$ dans $\mathbb{K}$. On note :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \text{ ou } A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}.$$

■ Les $(a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$ sont les coefficients de A. Pour tout $i\in [1, n]$, les $(a_{i,j})_{1\le j\le p}$ sont les coefficients de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A et pour tout $j\in [1, p]$, les $(a_{i,j})_{1\le i\le n}$ sont les coefficients de la $j^{\text{ème}}$ colonne de A.

■ ***Matrices particulières.*** Pour tous entiers naturels non nuls n et p, on définit :
– les matrices colonnes : matrices (n, 1),
– les matrices lignes : matrices (1, p),
– les matrices carrées (d'ordre n) : matrices (n, n),
– les matrices triangulaires supérieures : matrices (n, n) telles que $\forall(i, j)\in [1, n]^2$, $i > j$, $a_{i,j} = 0$,
– les matrices triangulaires inférieures : matrices (n, n) telles que $\forall(i, j)\in [1, n]^2$, $i < j$, $a_{i,j} = 0$,
– les matrices diagonales : matrices (n, n) telles que $\forall(i, j)\in [1, n]^2$, $i \neq j$, $a_{i,j} = 0$,
– les matrices symétriques : matrices (n, n) telles que $\forall(i, j)\in [1, n]^2$, $a_{i,j} = a_{j,i}$,
– la matrice identité (ou unité) d'ordre n (notée I_n ou I) : matrice (n, n) telle que $\forall(i, j)\in [1, n]^2$, $\begin{cases} i \neq j, a_{i,j} = 0 \\ i = j, a_{i,j} = 1 \end{cases}$.

■ Soient n et p deux entiers naturels non nuls. L'ensemble des matrices (n, p) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

■ Soit n un entier naturel non nul. L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

II. Opérations sur les matrices

■ ***Somme de deux matrices.*** Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $(A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$. La somme des matrices A et B est la matrice $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C = A + B$ définie par : $C = (c_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ où :
$\forall (i, j) \in [1, n] \times [1, p]$, $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$.

■ ***Produit d'une matrice par un scalaire.*** Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Le produit de la matrice A par le scalaire λ est la matrice $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C = \lambda A$ définie par : $C = (c_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ où :
$\forall (i, j) \in [1, n] \times [1, p]$, $c_{i,j} = \lambda a_{i,j}$.

■ ***Produit de deux matrices.*** Soient n, m et p trois entiers naturels non nuls, $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}}$ et $B \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq p}}$. Le produit des matrices A et B est la matrice $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C = AB$ définie par : $C = (c_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ où :
$\forall (i, j) \in [1, n] \times [1, p]$, $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} b_{k,j}$.

■ Soit n un entier naturel non nul. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau.

■ Soit n un entier naturel non nul. L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonales (resp. triangulaires supérieures, resp. triangulaires inférieures) est un sous anneau de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$.

■ ***Polynôme de matrice.*** Soient $p \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{K}_p[X]$ écrit sous la forme $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit par P(A) la matrice : $P(A) = \sum_{k=0}^{p} a_k A^k$ (où A^0 désigne I_n).

■ ***Transposée d'une matrice.*** Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$. La transposée de la matrice A est la matrice $C \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $C = {}^tA$ définie par : $C = (c_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq n}}$ où :
$\forall (i, j) \in [1, p] \times [1, n]$, $c_{i,j} = a_{j,i}$.

Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $(A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a : ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$, ${}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$.
De plus, on a, pour tout entier naturel n non nul et pour tout $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$: ${}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA$. Enfin, si A est inversible, ${}^tA$ est inversible, d'inverse ${}^t(A^{-1})$.

■ ***Matrice symétrique.*** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est symétrique si et seulement si : ${}^tA = A$.

■ ***Formule du binôme.*** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ deux matrices telles que $AB = BA$ (on dit alors qu'elles commutent). On a : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $(A + B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$, en adoptant la convention usuelle : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $M^0 = I_n$.

Ensemble $GL_n(\mathbb{K})$

■ Soient n un entier naturel non nul et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est inversible si $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AB = BA = I_n$. Lorsque A est inversible, B est appelée inverse de A et on note $B = A^{-1}$.

■ Soit n un entier naturel non nul. On appelle groupe linéaire d'ordre n, et l'on note $GL_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles.

■ Soient n un entier naturel non nul et $(A, B) \in (GL_n(\mathbb{K}))^2$:

- A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$,
- ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$,
- AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

III. Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice

■ Soient n et p deux entiers naturels non nuls et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes de A sont :
– l'échange de deux lignes ou de deux colonnes : $L_i \leftrightarrow L_j$ ou $C_i \leftrightarrow C_j$,
– la multiplication d'une ligne ou d'une colonne par un scalaire α non nul : $L_i \leftarrow \alpha L_i$ ou $C_i \leftarrow \alpha C_i$,
– l'ajout d'un multiple d'une ligne ou d'une colonne à une autre : $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ ou $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$ $(i \neq j)$.

B. Systèmes de Cramer. Méthode du pivot de Gauss

I. Systèmes d'équations linéaires

■ Soient n et p deux entiers naturels non nuls et (S) le système de n équations à p inconnues dans $\mathbb{K}$:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

où les inconnues du système sont les $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$, les coefficients du système sont les $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et les $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$, éléments de $\mathbb{K}$.

Les solutions du système sont les $(\xi_i)_{1 \leq i \leq p} \in \mathbb{K}^p$ vérifiant (S).

■ Le système (S) est homogène si $\forall i \in [1, n]$, $b_i = 0$. Le système (S) est incompatible (impossible) s'il n'a aucune solution. Le système (S) est indéterminé s'il a plusieurs solutions. Deux systèmes sont équivalents s'ils ont les mêmes solutions.

■ On appelle système homogène associé à S le système :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = 0 \\ \qquad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = 0 \end{cases}$$

II. Opérations élémentaires sur les lignes

■ On appelle opération élémentaire sur les lignes d'un système (S) toute opération transformant le système (S) en un sytème équivalent.

■ Les opérations élémentaires sur les lignes d'un système sont :
– l'échange de deux lignes : $L_i \leftrightarrow L_j$,
– la multiplication d'une ligne par un scalaire α non nul : $L_i \leftarrow \alpha L_i$,
– l'addition d'un multiple d'une ligne à une autre : $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$.

III. Méthode du pivot de Gauss

Elle consiste à utiliser les opérations élémentaires sur les lignes afin de transformer un système quelconque en un système échelonné équivalent (c'est-à-dire tel que pour tout $i \in [2, n]$, les coefficients de $x_1, x_2 \dots, x_{i-1}$ sur L_i soient nuls et tel que si les coefficients de $x_1, x_2, \dots, x_{j-1}$ $(i \leq j \leq p)$ sur L_i sont nuls, alors les coefficients de $x_1, x_2, \dots, x_j$ sur L_{i+1} sont nuls également).

Soit à résoudre le système (S) :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}.$$

• Si $a_{1,1} \neq 0$ ($a_{1,1}$ est appelé pivot), on effectue, pour tout $i \in [2, n]$, les opérations $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}} L_1$. Le système (S) est alors transformé en un système équivalent $\begin{cases} L_1 \\ (S') \end{cases}$ où (S') est un système de n - 1 équations à p - 1 inconnues : $x_2, x_3, \ldots, x_p$. On applique ensuite la méthode à (S').

• Si $a_{1,1} = 0$, deux cas se présentent :

– si $\exists j \in [2, n]$, $a_{j,1} \neq 0$, on effectue alors la transformation $L_1 \leftrightarrow L_j$ et on se ramène alors au cas précédent,

– sinon, on considère le système (S') : $\begin{cases} a_{1,k}x_k + \ldots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,k}x_k + \ldots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,k}x_k + \ldots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$,

où k est le premier entier tel que $\exists j \in [1, n]$, $a_{j,k} \neq 0$ et on applique la méthode à (S').

On aboutit alors, en itérant la méthode jusqu'à ce que le système résiduel (S') soit un système d'une équation à au plus une inconnue, à un système échelonné.

IV. Interprétations d'un système

Soient n et p deux entiers naturels non nuls et (S) le système de n équations à p inconnues dans $\mathbb{K}$:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}.$$

▪ ***Interprétation matricielle.*** Soient $B = (b_i)_{1\leq i\leq n}$ et $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$. Résoudre (S) revient à résoudre l'équation AX = B, c'est-à-dire à trouver les vecteurs $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ tel(s) que AX = B.

▪ ***Interprétation fonctionnelle.*** Soient $b = (b_i)_{1\leq i\leq n}$ et f l'application de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ définie par : $\forall x \in \mathbb{K}^p$, $x = (x_j)_{1\leq j\leq p}$, $f(x) = \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}x_j\right)_{1\leq i\leq n}$. Résoudre (S) revient à résoudre l'équation f(x) = b, c'est-à-dire à trouver les vecteurs $x \in \mathbb{K}^p$ tel(s) que f(x) = b.

▪ ***Interprétation vectorielle.*** Soient $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $B = (b_i)_{1\leq i\leq n}$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$, et $(C_j)_{1\leq j\leq p}$ les p vecteurs colonnes de A. Résoudre (S) revient à résoudre l'équation $\sum_{j=1}^{p} x_jC_j = B$, c'est-à-dire trouver le(s) vecteurs $x \in \mathbb{K}^p$ tel(s) que $\sum_{j=1}^{p} x_jC_j = B$.

▪ ***Structure de l'ensemble des solutions d'un système de la forme f(x) = b.*** Soient $b = (b_i)_{1\leq i\leq n}$, f une application de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$, x_0 une solution particulière de l'équation f(x) = b, et (E_0) l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée f(x) = 0. L'ensemble des solutions de l'équation f(x) = b est : $\{x_0 + h, h \in E_0\}$, soit $x_0 + E_0$.

Remarques :

· Si (S) est homogène, résoudre (S) revient à déterminer le noyau de l'application linéaire f.

· Rechercher Im f revient à chercher l'ensemble des n-plets $(b_0, b_1, ..., b_n)$ tels que S admette au moins une solution.

· L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = b$ est un sous-espace affine de direction E_0.

· Ce dernier résultat est particulièrement utilisé lors de la résolution d'équations différentielles non homogènes.

V. Système de Cramer

▪ Le système $AX = B$ est un système de Cramer :
– si et seulement s'il admet une solution unique,
– si et seulement si A est inversible,
– si et seulement s'il existe une suite de transformations élémentaires sur les lignes de A (resp. les lignes du système) qui mène à une matrice triangulaire dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls (resp. à un système triangulaire dont les pivots sont tous non nuls).

VI. Application aux matrices inversibles

▪ ***Caractérisation des matrices inversibles.*** Soient n un entier naturel non nul et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est inversible :
– si et seulement si le système $AX = 0$ admet $X = 0$ pour unique solution,
– si et seulement si les vecteurs colonnes (ou lignes) de A sont indépendants,
– si et seulement si $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AB = I_n$ ou $BA = I_n$,
– si, et seulement si, toute matrice obtenue à partir de A par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes (ou sur les colonnes) de A est inversible.

▪ ***Conséquence :*** soit A une matrice diagonale ou triangulaire. A est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

▪ ***Inversibilité des matrices carrées d'ordre 2 :*** si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, A est inversible si, et seulement si $ad - bc \neq 0$, et on a alors : $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

VII. Rang d'une matrice

1. Définition et propriétés

▪ ***Définition.*** Soit M une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle rang de la matrice M le nombre maximal de colonnes linéairement indépendantes (on a donc : $0 \leq \operatorname{rg} M \leq p$).

▪ ***Propriétés.***

· Toute matrice obtenue à l'issue d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice M de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ possède le même rang que M.

· Si M est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors M et ${}^tM$ ont le même rang (on a donc : $0 \leq \operatorname{rg} M \leq \min(n, p)$.

▪ ***Conséquence.*** Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, son rang est égal à n.

2. Matrice J_r

▪ ***Définition.*** Soit $r \in [0, \min(n, p)]$. On note J_r, la matrice $J_r = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq n}}$ où :

$$\forall (i, j) \in [1, n] \times [1, p],\ a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \leq r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

■ ***Propriété.*** Soit M une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. M est de rang r si, et seulement si, il existe deux matrices $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $V \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ inversibles telles que : $M = UJ_rV$.

VIII. Programme officiel

Hors programme :

- Algorithmes liés au calcul matriciel et/ou à la résolution de systèmes.

A la limite du programme :

- Matrices antisymétriques,
- Matrices nilpotentes,
- Matrices blocs,
- Trace d'une matrice,
- Matrices équivalentes.

N.B. : Les déterminants de matrices sont traités dans le chapitre "Déterminants".

Chapitre 4. Systèmes linéaires et calcul matriciel

Maths SUP

OPTIMAL *SUP-SPE*

Fiche méthodologique

0. Apprendre et comprendre son cours

Attention aux mauvais réflexes en algèbre : de même que l'on peut avoir l'égalité $AB = 0$ sans que l'une des matrices A et B soit nulle, on n'a pas toujours : $AB = BA$. En particulier, si $n \geq 2$, l'anneau des matrices carrées d'ordre n n'est ni intègre, ni commutatif.

I. Montrer qu'une matrice carrée est / n'est pas inversible et déterminer son inverse

1. Montrer qu'une matrice carrée M est inversible

Pour montrer qu'une matrice M carrée d'ordre n est inversible, on peut montrer que :

– il existe une matrice N telle que $MN = NM = I$ (éventuellement à l'aide d'un polynôme annulateur),

– M est une matrice triangulaire (inférieure ou supérieure) dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls,
Attention... Une matrice non triangulaire admettant un ou plusieurs coefficients diagonaux nuls peut être inversible, comme c'est le cas, par exemple, de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

– il existe une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de M menant à une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont tous non nuls (notamment à l'aide de la méthode du pivot de Gauss),

– le système $MX = 0$ admet $X = 0$ pour unique solution,

– il existe une matrice N telle que $MN = I$ ou $NM = I$ (éventuellement à l'aide d'un polynôme annulateur),

– M est le produit de matrices inversibles,

– les lignes ou les colonnes de M sont indépendantes,

– le rang de M est égal à n,

– M est la transposée d'une matrice inversible,

– raisonner par l'absurde : en supposant M inversible, introduire la matrice M^{-1} et montrer qu'on aboutit à une contradiction,

– M est une matrice de passage (voir chapitre "**Espaces vectoriels**"),

– M est la matrice représentative d'une application linéaire bijective (voir chapitre "**Applications linéaires**"),

– $\det M \neq 0$ (voir le chapitre "**Déterminants**"),

– 0 n'est pas valeur propre de M (hors-programme en première année, voir le chapitre "**Diagonalisation**").

☞ Voir les exercices : "Méthode du pivot de Gauss : inversion de matrices", "Inversibilité de matrices paramétrées", "Rang d'une matrice", "Puissances n-ème d'une matrice paramétrée", "Matrices symétriques", "Matrices de Vandermonde", "Lemme de Hadamard".

2. Montrer qu'une matrice carrée M n'est pas inversible

Commençont tout d'abord par rappeler que par définition, une matrice inversible est nécessairement carrée. Ainsi, si M n'est pas une matrice carrée, il n'y a pas lieu de rechercher le caractère "inversible" ou non de M.

Pour montrer qu'une matrice M carrée d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) n'est pas inversible, on peut montrer que :

– M est une matrice triangulaire admettant au moins un zéro sur sa diagonale,

– il existe une suite de transformations sur les lignes (ou les colonnes) de M menant à une matrice triangulaire admettant au moins un coefficients diagonal nul (notamment à l'aide de la méthode du Pivot de Gauss),

– le système MX = Y n'est pas un système de Cramer,

– le système MX = 0 où X est une matrice colonne admet des solutions non nulles,

– M est le produit de matrices dont l'une au moins n'est pas inversible,

– M est la transposée d'une matrice non inversible,

– les lignes ou les colonnes de M forment une famille liée (éventuellement en remarquant que M admet une ligne ou une colonne nulle),

– le rang de M est strictement inférieur à n (éventuellement en montrant que M peut s'écrire sous forme $M = UJ_rV$, où $r \in [\![0, n-1]\!]$),

– M est la matrice représentative d'une application linéaire non bijective (voir le chapitre "**Applications linéaires**"),

– det M = 0 (voir le chapitre "**Déterminants**"),

– montrer que M est une matrice de Vandermonde (à la limite du programme en première année, voir le chapitre "**Déterminants**"),

– 0 est valeur propre de M (hors-programme en première année, voir le chapitre "**Diagonalisation**").

☞ Voir les exercices : "Inversibilité de matrices paramétrées", "Puissance n-ème d'une matrice paramétrée", "Matrice de Vandermonde".

3. Déterminer l'inverse d'une matrice inversible

Pour déterminer l'inverse d'une matrice M inversible carrée d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$), on peut :

– montrer qu'il existe une matrice N telle que MN = I ou NM = I (en particulier à l'aide d'un polynôme annulateur de M) : M est alors inversible d'inverse $M^{-1} = N$,

– appliquer la méthode du pivot de Gauss : en posant $M = I_n M$, on effectue une suite de transformations élémentaires sur les lignes de M (et de I_n) qui mènent à I_n (et à M^{-1}) et on obtient alors : $I_n = M^{-1}M$,

– en considérant un isomorphisme f d'un espace vectoriel E sur un espace vectoriel F admettant M pour matrice représentative relativement à des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E et F, déterminer l'isoomorphisme réciproque de f. L'inverse de M est alors la matrice de f^{-1} relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$,

– déterminer la solution du système MX = Y (notamment à l'aide des formules de Cramer, voir le chapitre "**Déterminants**"), et exprimer alors X en fonction de M. Si X = CY, alors $M^{-1} = C$.

☞ Voir les exercices : "Méthodes du pivot de Gauss : inversion de matrices", "Rang d'une matrice", "Utilisation de fractions rationnelles (MPSI)".

II. Résoudre un système linéaire

Pour résoudre un système linéaire, on peut :

– utiliser la méthode du pivot de Gauss : effectuer une suite de transformations élémentaires sur les lignes du système menant à un système triangulaire dont tous les pivots sont non nuls,

– interpréter matriciellement le système par une relation de la forme MX = Y, où X est la matrice-colonne contenant les inconnues du système, et inverser la matrice M : on a alors $X = M^{-1}Y$,

– s'il s'agit d'un système linéaire non homogène (i.e. d'un système pouvant s'interpréter matriciellement sous la forme

$MX = Y$, où X est la matrice-colonne contenant les inconnues du système, et où Y est une colonne non nulle),

i) déterminer une solution particulière X_0 du système,

ii) résoudre le système $MX = 0$,

iii) les solutions du système $MX = Y$ sont alors les éléments de l'ensemble $\{X_0 + X / MX = 0\}$.

III. Montrer qu'une matrice carrée est symétrique, antisymétrique

Commençont tout d'abord par rappeler que par définition, une matrice symétrique (resp. antisymétrique) est nécessairement carrée. Ainsi, si M n'est pas une matrice carrée, il n'y a pas lieu de rechercher le caractère "symétrique" (resp. "antisymétrique') ou non de M.

Pour montrer qu'une matrice M carrée d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) est symétrique (resp. antisymétrique), on peut :

– revenir à la définition : en notant $M = (m_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$, montrer que : $\forall (i, j) \in [1, n]^2$, $m_{j,i} = m_{i,j}$ (resp. $m_{j,i} = - m_{i,j}$),

– montrer que ${}^tM = M$ (resp. ${}^tM = - M$),

– montrer que M est la matrice représentative d'un produit scalaire symétrique (M est alors symétrique à coefficients réels, voir chapitre "**Espaces préhilbertiens et euclidiens**").

☞ Voir l'exercice : "Matrices symétriques".

IV. Calculer la puissance $n^{ème}$ d'une matrice carrée

Pour déterminer la puissance $n^{ème}$ ($n \in \mathbb{N}$) d'une matrice carrée M, on peut :

– si M est diagonale, élever ses coefficients diagonaux à la puissance n,

– montrer que M est semblable à une matrice N dont on sait calculer la puissance $n^{ème}$: on écrit alors $M = PNP^{-1}$ (où P est une matrice de passage), et on obtient par récurrence immédiate sur n : $M^n = PN^nP^{-1}$,

– décomposer M comme la somme de deux matrices qui commutent puis utiliser la formule du binôme de Newton. Souvent, l'une des deux matrices est diagonale (ou diagonalisable, hors-programme en première année, cf. chapitre "**Diagonalisation**") et l'autre est nilpotente (ses puissances sont nulles à partir d'un certain rang) ou idempotente (ses puissances sont égales à elle-même à partir d'un certain rang), ce qui limite le nombre de termes à calculer dans la somme,

– conjecturer la forme générale de M^n à l'aide de M^2 et M^3 puis procéder par récurrence,

– prouver par récurrence que M^n peut tonjours s'écrire comme combinaison linéaire de deux ou trois matrices simples ($M^n = a_n I + b_n M + c_n M^2$ par exemple) puis déterminer a_n, b_n et c_n à l'aide des premiers termes et des relations de récurrence obtenues dans la partie "hérédité" de la preuve par récurrence,

– déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par un polynôme annulateur de M, puis substituer M à X dans la division euclidienne.

☞ Voir les exercices : "Suites et matrice", "Puissance n-ème d'une matrice", "Puissance n-ème d'une matrice paramétrée".

V. Déterminer une matrice représentative d'une application linéaire

Pour déterminer la matrice représentative d'une application linéaire f de E dans F relativement à une base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E dans une base $(f_i)_{1\leq i\leq p}$ de F, il suffit d'écrire, en colonnes, les coordonnées de vecteurs $(f(e_i))_{1\leq i\leq n}$ dans la base $(f_i)_{1\leq i\leq p}$.

En particulier, pour déterminer la matrice représentative d'un endomorphisme f de E dans une base $\mathcal{B}$ de E, il suffit d'écrire, en colonne, les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ des images par f des vecteurs de $\mathcal{B}$.

Penser qu'une application linéaire f admet une infinité de matrices représentatives, qui dépendent uniquement des bases dans lesquelles on choisit de représenter f.