Proposition de correction de l'épreuve :

Mathématiques 1 Filière MP CCINP 2024

B. Vidal pour Optimal Sup-Spé

22/04/2024

Exercice I

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ Comme X est à valeurs entières il vient :

$$\{X > k-1\} = \{X = k\} \cup \{X > k\}$$

Or les événements $\{X = k\}$ et $\{X > k\}$ étant incompatibles en passant aux probabilités on a :

$$\mathbb{P}(X > k-1) = \mathbb{P}(X = k) + \mathbb{P}(X > k)$$

On en déduit alors que :

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k)$$

Ainsi on obtient en utilisant cette formule :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k=1}^{n} k\left(\mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X > k-1) - \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X > k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\mathbb{P}(X > k) - \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X > k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} k\mathbb{P}(X > k) + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X > k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n) \qquad \text{(par télescopage)}
\end{aligned}$$

Pour démontrer le résultat du cours souhaité, reste maintenant à montrer que : $n\mathbb{P}(X > n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et passer à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ l'égalité précédente.

On a :

$$\{X > n\} = \bigcup_{k=n+1}^{+\infty} \{X = k\}$$

Donc par disjonction de cette union il vient :

$$\mathbb{P}(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)$$

Et par suite :

$$0 \leq n\mathbb{P}(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X = k) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)$$

Or $\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et tend vers 0 en tant que suite des restes d'une série convergente puisque par hypothèse $\mathbb{E}(X)$ existe. Donc d'après le théorème de l'encadrement on conclut que $n\mathbb{P}(X > n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et on a bien par passage à la limite :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$$

2. Puisqu'il n'y a que n boules dans l'urne, notons tout de suite que $X(\Omega) = [\![1; n]\!]$.
   Soit $k \in [\![1; n]\!]$. Les tirages étant effectués de manière équiprobable et avec remise on a :

   $$\{X \leq k\} = \bigcap_{i=1}^{p} \{U_i \leq k\} \qquad \text{(ou } U_i \hookrightarrow \text{Unif}(n) \text{ avec les } (U_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ mutuellement indépendantes)}$$

   Or $\mathbb{P}(U_i \leq k) = \frac{k}{n}$ donc, les variables (U_i) étant mutuellement indépendantes, il vient :

   $$\mathbb{P}(X \leq k) = \left(\frac{k}{n}\right)^p$$

   Notons que l'on a :

   $$\mathbb{P}(X \leq 0) = 0 = \left(\frac{0}{n}\right)^p$$

   .

   On peut donc étendre cette formule à $[\![0; n]\!]$ et par un raisonnement analogue à celui de la question précédente il vient alors :

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k-1)\\ &= \left(\frac{k}{n}\right)^p - \left(\frac{k-1}{n}\right)^p\\ &= \frac{1}{n^p}\left(k^p - (k-1)^p\right)\end{aligned}$$

   Conclusion :

   $$\boxed{X(\Omega) = [\![1; n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in X(\Omega) \;\; \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n^p}\left(k^p - (k-1)^p\right)}$$

3. En reconnaissant une somme de Riemann sur l'intervalle $[0;1]$, il vient en posant $f : t \mapsto t^p$ (fonction continue sur $[0;1]$) que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^p = \int_0^1 t^p \mathrm{d}t = \frac{1}{p+1}$$

Donc en réutilisant la question 1. puis par passage au complémentaire il vient que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X > k)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(1-\mathbb{P}(X\le k))\\ &= n - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^p\end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}(X) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - \frac{1}{p+1} = \frac{p}{p+1}$$

Si bien que :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) \underset{+\infty}{\sim} \frac{np}{p+1}}$$

Exercice II

4. D'après le cours, et par le théorème de Cauchy-Lipschitz on sait que $\mathcal{S}_I(H)$ est un espace vectoriel de dimension 2 car la fonction $x \mapsto x^2$ ne s'annule pas sur I.

5. Raisonnons par analyse-synthèse et supposons qu'il existe f une fonction développable en série entière (sur $\mathbb{R}$) solution de (E) sur I. On a alors :

$$\begin{aligned}&\forall x \in \mathbb{R}_+^* : \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\\ &\forall x \in \mathbb{R}_+^* : \quad x^2 f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n\\ &\forall x \in \mathbb{R}_+^* : \quad 4xf'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 4na_n x^n\\ &\forall x \in \mathbb{R}_+^* : \quad (2-x^2)f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^n\end{aligned}$$

Ainsi en ré-injectant dans (E) on obtient :

$$2a_0 + 6a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty}\left[n(n-1)a_n + 4na_n + 2a_n - a_{n-2}\right]x^n = 1$$

Donc par unicité du développement en série entière on obtient que $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_1 = 0$ et

$$\forall n \ge 2 \quad n(n-1)a_n + 4na_n + 2a_n - a_{n-2} = 0$$

En arrangeant cette dernière relation on obtient :

$$\forall n \geq 2 \quad a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} a_{n-2}$$

Ainsi on montre par une récurrence immédiate que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} a_{2n+1} = 0 \\ a_{2n} = \frac{1}{(2n+2)!} \end{cases}$$

Finalement on obtient que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+2)!} x^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n-2} = \frac{\cosh(x) - 1}{x^2}$$

On a donc bien montré l'unicité. La synthèse est immédiate, en posant la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n-2}$ f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, vérifie (E) par les mêmes calculs que précédemment et on a :

$$\forall x \in \mathrm{I} \quad f(x) = \frac{\cosh(x) - 1}{x^2}$$

6. Par principe de superposition des solutions comme f et g sont solutions de (E) sur I alors $f - g$ est solution de (H) sur I. Or

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) - g(x) = \frac{\cosh(x)}{x^2}$$

D'après le cours et les théorèmes sur les structures des espaces de solutions il vient :

$$\mathcal{S}_{\mathrm{I}}(\mathrm{E}) = \left\{ x \mapsto \lambda \frac{\sinh(x)}{x^2} + \mu \frac{\cosh(x)}{x^2} + f(x) \;\middle|\; (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Car $x \mapsto \frac{\sinh(x)}{x^2}$ et $x \mapsto \frac{\cosh(x)}{x^2}$ ne sont pas colinéaires donc forment une base de $\mathrm{S}_{\mathrm{I}}(\mathrm{H})$ qui est de dimension 2 d'après la question 4.

7. Il n'y a pas de solution à (H) sur $\mathbb{R}$ à part la fonction identiquement nulle puisque $x \mapsto \frac{\sinh(x)}{x^2}$ et $x \mapsto \frac{\cosh(x)}{x^2}$ ne sont pas dérivables en 0. Donc la dimension de l'espace $\mathrm{S}_{\mathbb{R}}(\mathrm{H})$ est 0.

PROBLÈME

8. Notons déjà que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ est finie en reconnaissant une série de Riemann convergente car son paramètre est $2 > 1$. De plus en admettant la convergence donnée dans l'énoncé on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Or comme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Il vient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Donc en admettant le résultat donné dans le sujet il vient finalement :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \times \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$$

Partie I

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $v : x \mapsto (\sin x)^{n+1}$. v est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad v'(x) = (n+1)\cos x(\sin x)^n$$

Ainsi par intégration par parties en posant $u : x \mapsto -\cos x$ et v (la même fonction que ci-dessus) deux fonctions C^1 sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ il vient :

$$\begin{aligned}
W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n+2} \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x(\sin x)^{n+1} \\
= \Big[-\cos x(\sin x)^{n+1}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x(\sin x)^n \mathrm{d}x \\
= 0 + (n+1)\big[W_n - W_{n+2}\big] \qquad (\text{car } \cos^2 x = 1 - \sin^2 x)
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n}$$

Raisonnons par récurrence et posons pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{H}(n) : W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

D'une part on a :

$$W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\mathrm{d}x = 1$$

Et d'autre part :

$$\frac{2^{2\times 0}(0!)^2}{1!} = 1$$

Donc $\mathcal{H}(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie. D'après l'encadré ci-dessus on a :

$$\begin{aligned}
W_{2n+3} &= \frac{2n+2}{2n+3} W_{2n+1} \\
&= \frac{2n+2}{2n+3} \times \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \\
&= \frac{(2n+2)^2 \times 2^{2n}(n!)^2}{(2n+3)!} \\
&= \frac{2^2(n+1)^2 \times 2^{2n}(n!)^2}{(2n+3)!} \\
&= \frac{2^{2(n+1)}(n+1)!}{(2n+3)!}
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.

Ainsi par principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

10. D'après la formule du cours (*du binôme généralisé*) on sait que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \forall x \in]-1;1[\qquad (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \qquad \text{avec} \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha \times (\alpha-1) \times \ldots (\alpha-k+1)}{k!}$$

Ainsi comme $(-x^2) \in]-1;0]$ si $x \in]-1;1[$ il vient en posant $\alpha = -\frac{1}{2}$:

$$\forall x \in]-1;1[\quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-x^2)^k$$

Avec

$$\binom{\frac{-1}{2}}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (-\frac{1}{2} - i) = \frac{1}{k!} (-1)^k \prod_{i=0}^{k-1} \frac{2i+1}{2} = \frac{1}{k!} \frac{(-1)^k}{2^k} \prod_{i=0}^{k-1} (2i+1) = \frac{1}{k!} \frac{(-1)^k}{2^k} \frac{(2k)!}{2^k k!} = \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k} (k!)^2}$$

Ainsi en ré-injectant sous la somme il vient :

$$\forall x \in]-1;1[\quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k}(k!)^2} (-1)^k x^{2k}$$

Donc :

$$\boxed{\forall x \in]-1;1[\quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k}}$$

En reconnaissant la dérivée de la fonction arcsin à gauche de l'égalité on peut en intégrant terme à terme sur l'intervalle de convergence obtenir un developpement en série entière de la fonction arcsin sur $]-1;1[$.

Comme $\arcsin(0) = 0$, il vient en intégrant :

$$\boxed{\forall x \in]-1;1[\quad \arcsin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2(2k+1)} x^{2k+1}}$$

11. La fonction sin réalisant une bijection de $[0;\frac{\pi}{2}[$ vers $[0;1[\subset]-1;1[$; en posant le changement de variable $x = \sin(y)$ on obtient que :

$$\forall y \in [0;\frac{\pi}{2}[\quad y = \arcsin(\sin(y)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2(2k+1)} (\sin(y))^{2k+1}$$

12. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ notons $f_k : x \mapsto \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2(2k+1)} (\sin(x))^{2k+1}$.
    - Les $(f_k)_k$ forment une suite de fonctions continues et intégrables sur $[0;\frac{\pi}{2}[$.
    - D'après le résultat précédent $\sum_{k\geq 0} f_k$ converge simplement sur $[0;\frac{\pi}{2}[$ vers $x \mapsto x$ continue donc $\mathcal{C}_{pm}$.
    - De plus les $(f_k)_k$ sont des fonctions positives

Alors en travaillant dans $\overline{\mathbb{R}_+} = [0;+\infty]$ et en vertu du théorème de Beppo Levi on peut ici intervertir les symbôles $\int$ et $\sum$.

Ainsi on a bien :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2(2k+1)}(\sin(x))^{2k+1}\Big]\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2(2k+1)}(\sin(x))^{2k+1}\mathrm{d}x$$

13. De plus en calculant le membre de droite il vient :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2(2k+1)}(\sin(x))^{2k+1}\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2(2k+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin(x))^{2k+1}\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2(2k+1)}\mathrm{W}_{2k+1}\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2(2k+1)} \times \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\end{aligned}$$

En calculant le membre de gauche, grâce au résultat de la question 11. il vient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2(2k+1)}(\sin(x))^{2k+1}\Big]\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}x = \Big[\frac{x^2}{2}\Big]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}$$

Ainsi en utilisant la question préliminaire du problème on conclut que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Partie II

14. D'après le développement en série entière "géométrique" on a :

$$\forall x \in]-1;1[\quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

Donc par changement de variable en multipliant par -1 on obtient :

$$\boxed{\forall x \in]-1;1[\quad \frac{1}{x^2-1} = -\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}}$$

Ainsi il vient :

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}(-\ln x)x^{2n}\mathrm{d}x$$

Encore une fois, quite à travailler dans $[0;+\infty]$ en vertu du théorème de Beppo Levi on peut intervertir les symboles. En effet les fonctions $g_n : x \mapsto (-\ln x)x^{2n}$ sont bien positives sur $]0;1[$.

Il vient alors :

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}(-\ln x)x^{2n}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 (-\ln x)x^{2n}\mathrm{d}x$$

Or par intégration par parties généralisée :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (-\ln x)x^{2n}\mathrm{d}x &= \left[(-\ln x)\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_{x\mapsto 0}^{x\mapsto 1} + \frac{1}{2n+1}\int_0^1 x^{2n}\mathrm{d}x \\ &= 0 + \frac{1}{(2n+1)^2}\end{aligned}$$

Ainsi on peut conclure que :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}}$$

15. On a la majoration suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \left|\frac{\arctan(xt)}{1+t^2}\right| \leq \frac{\pi}{2}\times\frac{1}{1+t^2}$$

Et $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Donc f est bien définie.

De plus :

- pour tout x dans $\mathbb{R}_+$, $t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}$ est $\mathcal{C}_{pm}$ sur $[0;+\infty[$
- pour t dans $\mathbb{R}_+$, $x \mapsto \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}$ est continue sur $[0;+\infty[$
- enfin :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \left|\frac{\arctan(xt)}{1+t^2}\right| \leq \frac{\pi}{2}\times\frac{1}{1+t^2}$$

  avec $t \mapsto \frac{\pi}{2}\times\frac{1}{1+t^2}$ $\mathcal{C}_{pm}$ sur $[0;+\infty[$ et intégrable

Donc d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre il vient que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

16. Soit $\varepsilon \in]0;1]$. Montrons que f est de classe C^1 sur $[\varepsilon;1]$. Comme on a :

- pour t dans $\mathbb{R}_+$, $x \mapsto \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}$ est de classe C^1 sur $[\varepsilon;1]$
- pour tout x dans $[\varepsilon;1]$, $t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}$ est $\mathcal{C}_{pm}$ sur $[0;+\infty[$ et intégrable d'après les remarques dans la question précédente
- enfin :

$$\forall x \in [\varepsilon;1],\ \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\arctan(xt)}{1+t^2}\right)\right| = \left|\frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}\right| \leq \frac{t}{(1+t^2)(t^2\varepsilon^2+1)}$$

  Et $t \mapsto \frac{t}{(1+t^2)(t^2\varepsilon^2+1)}$ est $\mathcal{C}_{pm}$ et intégrable sur $[0;+\infty[$

Il vient donc d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre que f est C^1 sur $[\varepsilon;1]$ et donc sur $]0;1]$. De plus :

$$\boxed{\forall x \in]0;1] \quad f'(x) = \int_0^{+\infty}\frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}\mathrm{d}t}$$

17. On a clairement que :

$$\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2t}{1+t^2x^2} = (1-x^2)\frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$$

Fixons un $\mathrm{M} > 0$ et calculons à l'aide de cette formule l'intégrale partielle suivante :

$$\forall x \in]0;1[\quad \int_0^{M} \frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}\mathrm{d}t = \frac{1}{1-x^2}\left[\int_0^{M} \frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t - \int_0^{M} \frac{x^2t}{1+t^2x^2}\mathrm{d}t\right]$$
$$= \frac{1}{1-x^2}\left[\frac{\ln(1+M^2)}{2} - \frac{\ln(1+x^2M^2)}{2}\right]$$
$$= \frac{1}{1-x^2}\times\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+M^2}{1+M^2x^2}\right)$$
$$= \frac{1}{1-x^2}\times\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{M^2}}{x^2+\frac{1}{M^2}}\right)$$

Donc en passant à la limite lorsque M tend vers $+\infty$ il vient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}\mathrm{d}t = \frac{1}{1-x^2}\times\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-\ln(x)}{1-x^2} = \frac{\ln(x)}{x^2-1}$$

Ainsi on a bien :

$$\forall x \in]0;1[\quad f'(x) = \frac{\ln(x)}{x^2-1}$$

18. En revenant à la définition de f il vient :

$$f(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t = \left[\frac{(\arctan(t))^2}{2}\right]_0^{t\longrightarrow+\infty} = \frac{\pi^2}{8}$$

Or en combinant les résultats de cette partie II il vient par la continuité de f en 0 et en 1 :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x = f(1)-f(0) = \frac{\pi^2}{8} - 0 = \frac{\pi^2}{8}$$

Ainsi en utilisant à nouveau la question préliminaire on conclut que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$