Optimal Sup-Spé
Groupe Ipesup ▪ Le n°1 en Sup-Spé

Proposition de correction de l'épreuve Mathématiques 1 Filières MP/MPI Centrale 2024

Correction rédigée par William Cazin pour Optimal Sup-Spé

02/05/2024

I. Inégalité de Knopp

1) φ étant convexe sur $\mathbb{R}$, alors d'après l'inégalité de Jensen, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \varphi\circ f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

- D'une part, φ étant continue sur $\mathbb{R}$, on a (somme de Riemann) :

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

- D'autre part, $\varphi\circ f$ étant continue par morceaux par composition, on a (toujours une somme de Riemann) :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \varphi\circ f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi\circ f(t)\,\mathrm{d}t$$

Ainsi, par passage à la limite dans l'inégalité :

$$\boxed{\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi\circ f(t)\,\mathrm{d}t}$$

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$0 \leqslant g(x) = \int_0^x \frac{t}{x}\underbrace{f(t)}_{\geqslant 0}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (\text{car } \frac{t}{x} \leqslant 1)$$

f étant bornée au voisinage de 0, il en découle $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

D'où, par encadrement :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} g(x) = 0}$$

3) Tout d'abord, posons $\Psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \frac{1}{x} t f(t) 1_{[0,x]}(t) \end{array}$ de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = \int\limits_0^{+\infty} \Psi(x,t)\,\mathrm{d}t$

Dès lors,

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ t \longmapsto \Psi(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ par produit.
- $\Psi(x,\cdot) \xrightarrow[x\to+\infty]{\text{C.S}} 0$ continue par morceaux.
- $\forall (x,t) \in \mathrm{R}_+^* \times \mathbb{R}_+,\ \Psi(x,t) = \begin{cases} \frac{t}{x} f(t) & \text{si } t \leqslant x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, d'où $\forall (x,t) \in \mathrm{R}_+^* \times \mathbb{R}_+,\ \Psi(x,t) \leqslant \underbrace{f(t)}_{\text{intégrable}}$

Ainsi, par le théorème de convergence dominée :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0}$$

4) Attention ! Il y a une erreur dans l'énoncé. En effet, afin de pouvoir procéder à une intégration par parties, il est nécessaire que f soit <u>continue</u> sur $\mathbb{R}_+$. Nous allons donc démontrer ce résultat sous cette hypothèse.

f étant désormais continue sur $\mathbb{R}_+$, $x \longmapsto \int\limits_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t$ est $\mathscr{C}^1$ par le théorème fondamental de l'analyse.

Sous réserve de convergence, on obtient après intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x &= \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} \left(\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{1}{x} \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t \right]_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x} \times x f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{[-g(x)]_0^{+\infty}}_{=0} + \underbrace{\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{converge}}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\int\limits_0^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x \ \text{ converge et } \int\limits_0^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x}$$

Pour la suite du sujet, nous admettrons ce résultat dans le cas où f est continue par morceaux.

5) On a :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\,\mathrm{d}t\right) &= \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(tf(t))-\ln(t)\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(tf(t))\,\mathrm{d}t-\frac{1}{x}\int_0^x \ln(t)\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(tf(t))\,\mathrm{d}t\right)\times\exp\left(-\frac{1}{x}\int_0^x \ln(t)\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(tf(t))\,\mathrm{d}t\right)\times\exp\left(-\frac{1}{x}(x\ln(x)-x)\right)\\ &= \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(tf(t))\,\mathrm{d}t\right)\times\underbrace{\exp(1-\ln(x))}_{=\frac{e}{x}}\end{aligned}$$

i.e : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\,\mathrm{d}t\right)=\frac{e}{x}\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(tf(t))\,\mathrm{d}t\right)$

Enfin, exp étant convexe et $\ln\circ(\mathrm{I}d\times f)$ continue par morceaux, on en déduit d'après 1) :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(tf(t))\,\mathrm{d}t\right)\leqslant\frac{1}{x}\int_0^x \exp\circ\ln(tf(t))\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{x}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\,\mathrm{d}t\right)\leqslant\frac{e}{x^2}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}$$

6) D'après 4), $x\longmapsto\frac{e}{x^2}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Donc, par comparaison d'intégrales de fonctions positives, $x\longmapsto\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x\ln(f(t))\,\mathrm{d}t\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

De même, toujours d'après 4) :

$$\int_0^{+\infty}\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\leqslant e\underbrace{\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}\left(\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x}_{=\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\leqslant e\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x}$$

7) Soit $k\in\mathbb{N}^*$.

- 1er cas : si $k=1$

  Alors v_1 est constante et atteint bien une valeur minimale en $x=1$.

- 2ème cas : si $k\geqslant 2$

  Alors v_k est dérivable sur $[k-1,k]$ et on a par décroissance de la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$:

$$\begin{aligned}
\forall x \in [k-1,k],\ v_k'(x) &= \underbrace{-\frac{1}{x^2}}_{\leqslant 0} \times \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \ln(a_i)}_{\geqslant (k-1)\ln(a_k)} - \frac{1}{x^2}(x-k+1)\ln(a_k) + \frac{1}{x}\ln(a_k) \\
&\leqslant -\frac{1}{x^2}\big((k-1)\ln(a_k) + (x-k+1)\ln(a_k) - x\ln(a_k)\big)
\end{aligned}$$

i.e : $\forall x \in [k-1,k],\ v_k'(x) \leqslant 0$

Ainsi, v_k est décroissante sur $[k-1,k]$, et admet donc un minimum en $x = k$.

- Conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ v_k(x) \text{ est minimal en } x = k.}$$

8) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$\begin{aligned}
\int_{k-1}^{k} \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x &= \int_{k-1}^{k} \exp\left(\frac{1}{x}\sum_{i=1}^{k-1}\int_{i-1}^{i} \underbrace{\ln(f(t))}_{=\ln(a_i)} + \frac{1}{x}\int_{k-1}^{x} \underbrace{\ln(f(t))}_{=\ln(a_k)}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{k-1}^{k} \exp\left(\frac{1}{x}\sum_{i=1}^{k-1}\ln(a_i) + \frac{1}{x}(x-k+1)\ln(a_k)\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{k-1}^{k} \underbrace{\exp(v_k(x))}_{\geqslant \exp(v_k(k))}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

D'où :

$$\int_{k-1}^{k} \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \geqslant \exp(v_k(k))$$

Autrement dit :

$$\int_{k-1}^{k} \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \geqslant \exp\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\ln(a_i)\right)$$

9) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de termes strictement positifs décroissante telle que $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

Alors , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{k} a_i\right)^{\frac{1}{k}} &= \sum_{k=1}^{n}\exp\left(\ln\left(\left(\prod_{i=1}^{k} a_i\right)^{\frac{1}{k}}\right)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\exp\left(\frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{k}\ln(a_i)\right)\right) \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_0^n \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$\text{i.e : } \sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{k} a_i\right)^{\frac{1}{k}} \leqslant \int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \qquad \left(\text{car } \forall x\in\mathbb{R}_+,\ \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\,\mathrm{d}t\right)\geqslant 0\right)$$

$$\leqslant e\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(d'après 6))}$$

$$\leqslant e\sum_{k=1}^{+\infty}\int_{k-1}^{k}\underbrace{f(t)}_{=a_k}\mathrm{d}t \qquad \left(\text{d'après la relation de chasles car } \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ converge}\right)$$

On a finalement :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{k} a_i\right)^{\frac{1}{k}} \leqslant e\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

Ainsi, la série de terme général $\left(\prod_{k=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}}$ converge par comparaison de séries à termes positifs.

Enfin, par passage à la limite :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant e\sum_{n=1}^{+\infty} a_n}$$

10) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de termes strictement positifs telle que $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

Alors nécessairement : $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

On en déduit que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée. Par conséquent, il est possible de construire une nouvelle suite dont les termes sont ceux de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ mais qui sera décroissante. Notons $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cette nouvelle suite à construire.

Pour α_1, il suffit de poser $\alpha_1 = \max\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ (dont l'existence est assurée par la convergence vers 0 de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$).
Si on note k_1 le plus petit rang pour lequel $a_{k_1} = \max\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$, on peut construire par la suite α_2 en posant $\alpha_2 = \max\limits_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{k_1\}} a_n$. Et on notera cette fois-ci k_2 le plus petit rang pour lequel $a_{k_2} = \max\limits_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{k_1\}} a_n$.
Et ainsi de suite...

Ainsi, en posant $\sigma : n \longmapsto k_n$, alors σ est une permutation de $\mathbb{N}^*$ et puisque $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille sommable à termes positifs :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

De plus, par construction :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\prod_{i=1}^{n} a_{k_i}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\prod_{i=1}^{n} \alpha_i\right)^{\frac{1}{n}} \qquad (\text{car les } a_{k_i} \text{ sont les } n \text{ plus grands termes de la suite } (a_i)_{i\in\mathbb{N}^*})$$

On en déduit donc par décroissance de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} &\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^{\frac{1}{n}} \\
&\leqslant e\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n \qquad \text{(d'après 9))} \\
&\leqslant e\sum_{n=1}^{+\infty} a_n
\end{aligned}
$$

Conclusion (Inégalité de Carleman) : Pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à termes strictement positifs telle que $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge, alors $\sum_{n\geqslant 1}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}}$ converge et :

$$
\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant e\sum_{n=1}^{+\infty} a_n}
$$

II. Inégalité de Carleman

11) Soit $x=(x_1,\cdots,x_n)\in \mathrm{U}_n$, alors :

D'une part : $\nabla f(x)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_2\cdots x_n\\ x_1x_3\cdots x_n\\ \vdots\\ x_1\cdots x_{n-1}\end{pmatrix}$

D'autre part : $\nabla g_s(x)=\begin{pmatrix}\frac{\partial g_s}{\partial x_1}(x)\\ \vdots \\ \frac{\partial g_s}{\partial x_n}(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$

12) On peut écrire :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{X}_s &= \left\{x\in\overline{\mathrm{U}_n}\,\middle|\, g_s(x)=0\right\}\\
&= \left\{x\in\overline{\mathrm{U}_n}\,\middle|\, \sum_{k=1}^{n} x_k = s\right\}\\
&= \left\{x\in\overline{\mathrm{U}_n}\,\middle|\, \|x\|_1 = s\right\}
\end{aligned}
$$

Ainsi, $\mathrm{X}_s=\mathrm{S}(0,s)$ et donc f est continue (polynomiale en les x_k) sur un compact (car $\mathrm{S}(0,s)$ est fermé et borné en dimension finie).

D'où, par le théorème des bornes atteintes, $f_{|\mathrm{X}_s}$ atteint un maximum sur X_s.

De plus, $\forall x\in\overline{\mathrm{U}_n}\backslash \mathrm{U}_n,\ f(x)=0$ (car une des composantes au moins est nulle) et $f\left(\left(\frac{s}{n},\cdots,\frac{s}{n}\right)\right)=\left(\frac{s}{n}\right)^n$ avec $\left(\frac{s}{n},\cdots,\frac{s}{n}\right)\in \mathrm{X}_s\cap \mathrm{U}_n$.

On peut donc ajouter que $f_{|\mathrm{X}_s}$ atteint un maximum sur $\mathrm{X}_s\cap\mathrm{U}_n$.

13) Comme f atteint un maximum en $a \in X_s$ et que $dg_a = h \longmapsto \sum_{i=1}^{n} h_i \neq 0$, alors par le théorème d'optimisation sous contrainte, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que : $df_a = \lambda dg_a$

Ainsi, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$: $df_a((0,\cdots,\underbrace{a_k}_{k\text{-ième}},\cdots,0)) = \lambda dg_a((0,\cdots,a_k,\cdots,0))$

i.e : $\nabla f(a)^\top \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \nabla g(a)^\top \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ou encore $a_1 \cdots a_n = \lambda a_k$

D'où :

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ a_k = \frac{f(a)}{\lambda}$$

Or, comme $f(a)$ et les a_k sont strictement positifs, on peut ajouter que $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

14) Les a_k pour $k \in [\![1,n]\!]$ étant tous égaux, on en déduit : $\forall k \in [\![1,n]\!],\ a_k = \frac{s}{n}$

Donc : $\forall x \in X_s \cap U_n,\ f(x) \leqslant f(a)$, i.e : $\forall x \in X_s \cap U_n,\ f(x) \leqslant \left(\frac{s}{n}\right)^n$

D'où : $\forall x \in X_s \cap U_n,\ \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{s}{n}$

Or, $\forall x \in X_s \cap U_n,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = s$

Il en découle :

$$\forall x \in X_s \cap U_n,\ \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Enfin, soit $x \in \overline{U_n}$, alors :

- 1er cas : Si $x \in \overline{U_n} \backslash U_n$, alors un des x_i est nul et on a par produit : $\underbrace{\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}}_{=0} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

  D'où le résultat.

- 2ème cas : si $x \in U_n$, alors il existe $s \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x \in X_s$, et d'après ce qui précède :

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Conclusion (inégalité arithmético-géométrique) :

$$\boxed{\forall (x_1,\cdots,x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n,\ \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

15) Soit $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathrm{U}_n$, alors :

D'une part : $\nabla \mathrm{F}_n(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathrm{F}_n}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathrm{F}_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{x_2^{\frac{1}{2}}}{2x_1^{\frac{1}{2}}} + \cdots + \dfrac{(x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}}{n x_1^{\frac{n-1}{n}}} \\ \dfrac{x_1^{\frac{1}{2}}}{2x_2^{\frac{1}{2}}} + \cdots + \dfrac{(x_1 x_3 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}}{n x_2^{\frac{n-1}{n}}} \\ \vdots \\ \dfrac{(x_1 \cdots x_{n-1})^{\frac{1}{n}}}{n x_n^{\frac{n-1}{n}}} \end{pmatrix}$

D'autre part : $\nabla h_n(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_n}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

16) Tout d'abord, $\underbrace{\overline{\mathrm{U}_n}}_{\text{fermé}} \cap \underbrace{\mathrm{H}_n}_{\text{compact}}$ est compact par intersection.

Ainsi, F_n est continue (car polynomiale en les coefficients) sur un compact, donc $\mathrm{F}_{n|\overline{\mathrm{U}_n} \cap \mathrm{H}_n}$ admet un maximum par le théorème des bornes atteintes sur un compact.

17) Comme F_n atteint un maximum local en $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathrm{H}_n$, alors par le théorème d'optimisation sous contrainte, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\mathrm{dF}_n(a) = \lambda \, \mathrm{d}h_n(a)$.

On a donc pour tout $k \in [\![1, n]\!]$: $\mathrm{dF}_n(a)((0, \cdots, \underbrace{a_k}_{k\text{-ième}}, \cdots, 0)) = \lambda \, \mathrm{d}h_n(a)((0, \cdots, a_k, \cdots, 0))$

i.e : $\nabla \mathrm{F}_n(a)^\top \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \nabla h_n(a)^\top \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ou encore $a_k \left(\dfrac{a_1^{\frac{1}{k}} \cdots a_{k-1}^{\frac{1}{k}}}{k a_k^{\frac{k-1}{k}}} + \dfrac{a_1^{\frac{1}{k+1}} \cdots a_{k-1}^{\frac{1}{k+1}} a_{k+1}^{\frac{1}{k+1}}}{(k+1) a_k^{\frac{k}{k+1}}} + \cdots + \dfrac{a_1^{\frac{1}{n}} \cdots a_{k-1}^{\frac{1}{n}} a_{k+1}^{\frac{1}{n}} \cdots a_n^{\frac{1}{n}}}{n a_k^{\frac{n-1}{n}}} \right) = \lambda a_k$

Autrement dit : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\frac{(a_1 \cdots a_k)^{\frac{1}{k}}}{k} + \cdots \frac{(a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}}{n} = \lambda a_k$

Conclusion :

$$\boxed{\begin{cases} \gamma_1 + \dfrac{\gamma_2}{2} + \cdots + \dfrac{\gamma_n}{n} = \lambda a_1 \\ \qquad \dfrac{\gamma_2}{2} + \cdots + \dfrac{\gamma_n}{n} = \lambda a_2 \\ \qquad \qquad \vdots \\ \qquad \qquad \dfrac{\gamma_n}{n} = \lambda a_n \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1 \end{cases}}$$

De plus, les a_i et γ_i étant tous positifs, on peut préciser que $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

18) (a) En sommant toutes les égalités obtenues en 17), on obtient : $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k}{k} = \lambda \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$

Or, $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 1$, d'où :

$$\boxed{\lambda = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n = \mathrm{F}_n(a) = \mathrm{M}_n}$$

(b) Montrons par récurrence forte descendante sur $k \in [\![1, n]\!]$ la propriété $\mathscr{P}_k$: $\gamma_k = \begin{cases} \lambda k \left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right) a_k & \text{si } k < n \\ n & \text{sinon} \end{cases}$

- Initialisation : Pour $k = n$, on a de façon immédiate $\gamma_n = \lambda n a_n = \lambda \omega_n a_n$, d'où $\mathscr{P}_1$.

- Itération : Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$, supposons $\mathscr{P}_i$ pour tout $i \in [\![k+1, n]\!]$.

  Alors :

$$\begin{aligned}
\gamma_k &= \lambda k a_k - k \sum_{i=k+1}^{n} \frac{\gamma_i}{i} \\
&= \lambda k \left(a_k - \sum_{i=k+1}^{n-1} \left(1 - \frac{a_{i+1}}{a_i}\right) a_i - a_n \right) \\
&= \lambda k \left(a_k - \underbrace{\sum_{i=k+1}^{n-1} (a_i - a_{i+1})}_{\text{téléscopage}} - a_n \right) \\
&= \lambda k (a_k - (a_{k+1} - a_n) - a_n) \\
&= \lambda k (a_k - a_{k+1}) \\
&= \lambda k \left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right) a_k
\end{aligned}$$

  i.e : $\gamma_k = \lambda \omega_k a_k$

  D'où $\mathscr{P}_k$.

- Conclusion :

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!],\ \gamma_k = \lambda \omega_k a_k}$$

19) Pour rappel, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k+1} = \frac{1}{\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}}$ $\left(\text{avec } \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}} \xrightarrow[k \to +\infty]{} \frac{1}{e} \right)$

Or, la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = e^{-x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

En effet, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(-\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x \times \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} \right) e^{-x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \\
&= \left(\ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{1+x} \right) \underbrace{f(x)}_{\geqslant 0}
\end{aligned}$$

De plus, $\ln(x) - \ln(x+1) = -\int_x^{x+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant -\int_x^{x+1} \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}t \leqslant -\frac{1}{x+1}$

D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) \leqslant 0$$

Ainsi, $\left(\left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k+1}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante et de limite $\frac{1}{e}$.

Conclusion :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \frac{1}{e} \leqslant \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k+1}}$$

20) Tout d'abord : $\omega_1 = \frac{\gamma_1}{\lambda a_1} = \frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{1}{e}$ (car $\lambda > e$)

Donc on a bien : $\omega_1 \leqslant \frac{1}{e}$

Ensuite, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$:

$$\begin{aligned}
\omega_{k+1}^{k+1} &= \frac{\gamma_{k+1}^{k+1}}{\lambda^{k+1} a_{k+1}^{k+1}} \\
&= \frac{a_1 \cdots a_k a_{k+1}}{\lambda^{k+1} a_{k+1}^{k+1}} \\
&= \frac{1}{\lambda} \times \frac{\gamma_k^k}{\lambda^k a_{k+1}^k} \\
&= \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\gamma_k}{\lambda a_k}\right)^k \left(\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)^k \\
&= \frac{1}{\lambda} \omega_k^k \left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)^{-k}
\end{aligned}$$

Or : $1 - \frac{\omega_k}{k} = 1 - \left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right) = \frac{a_{k+1}}{a_k}$

D'où :

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ \omega_{k+1}^{k+1} = \frac{1}{\lambda} \omega_k^k \left(1 - \frac{\omega_k}{k}\right)^{-k}$$

Désormais, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, si on suppose $\omega_k \leqslant \frac{k}{k+1}$, alors : $\frac{\omega_k}{1-\frac{\omega_k}{k}} \leqslant \frac{\frac{k}{k+1}}{1-\frac{1}{k+1}} \leqslant \frac{\frac{k}{k+1}}{\frac{k}{k+1}} \leqslant 1$

Ainsi : $\omega_{k+1}^{k+1} \leqslant \frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{1}{e} \leqslant \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k+1}$

Ou encore :

$$\omega_{k+1} \leqslant \frac{k+1}{k+2}$$

Autrement dit, par récurrence (initialisation établie car $\omega_1 \leqslant \frac{1}{e} \leqslant \frac{1}{2}$) :

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!],\ \omega_k \leqslant \frac{k}{k+1}}$$

21) On en déduit donc d'après 20) que $\omega_n = n \leqslant \frac{n}{n+1} < 1$. Or $n \geqslant 1$, d'où la contradiction.

Conclusion :

$$\boxed{\lambda \leqslant e}$$

De plus, $\forall (x_1, \cdots, x_n) \in \mathrm{H}_n,\ \mathrm{F}_n((x_1, \cdots, x_n)) \leqslant \mathrm{F}_n((a_1, \cdots, a_n))$

$$\begin{aligned}
\text{Or, } \mathrm{F}_n((a_1, \cdots, a_n)) &= \sum_{k=1}^{n} (a_1 \cdots a_k)^{\frac{1}{k}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

Il en découle :

$$\boxed{\forall (x_1, \cdots, x_n) \in \mathrm{H}_n,\ \sum_{k=1}^{n} (x_1 \cdots x_k)^{\frac{1}{k}} \leqslant e}$$

22) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de termes strictement positifs telle que $\sum\limits_{n\geqslant 1} x_n$ converge.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, notons $s = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k > 0$.

D'après un raisonnement similaire, si on note $\mathrm{H}_n(s) = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1 + \cdots + x_n = s\}$, alors F_n atteint un maximum sur $\mathrm{U}_n \cap \mathrm{H}_n$ en $a := (a_1, \cdots, a_n)$.

D'où, d'après les calculs effectués en 17), il existe $\lambda \in]0, e]$ tel que :

$$\begin{cases} \gamma_1 + \dfrac{\gamma_2}{2} + \cdots + \dfrac{\gamma_n}{n} = \lambda a_1 \\ \qquad \dfrac{\gamma_2}{2} + \cdots + \dfrac{\gamma_n}{n} = \lambda a_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad \dfrac{\gamma_n}{n} = \lambda a_n \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_n = s \end{cases} \quad \text{avec } \forall k \in [\![1, n]\!],\ \gamma_k = (a_1 \cdots a_k)^{\frac{1}{k}}$$

En sommant les équations, on obtient :

$$\gamma_1 + \cdots + \gamma_n = \lambda(a_1 + \cdots + a_n) = \lambda s$$

Enfin, on en déduit :

$$\sum_{k=1}^{n} (x_1 \cdots x_k)^{\frac{1}{k}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} (a_1 \cdots a_k)^{\frac{1}{k}} \leqslant \lambda s \leqslant e \times s \leqslant e \sum_{k=1}^{n} x_k$$

Or, comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} x_n$ converge, alors $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\prod\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{k}}$ converge et par passage à la limite :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant e \sum_{n=1}^{+\infty} x_n}$$

III. Inégalité de Carleman-Yang

23) On a déjà :

$$\begin{aligned} \forall t \in]-1, 1[\setminus \{0\},\ \varphi(t) &= (1-t)^{1-\frac{1}{t}} \\ &= e^{(t-1)\frac{\ln(1-t)}{t}} \end{aligned}$$

Or, $x \longmapsto \ln(x)$ est dérivable en 1 et : $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\ln(1-t)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} -\frac{\ln(1-t)-\ln(1)}{-t} = -\ln'(1) = -1$

D'où, par continuité de l'exponentielle : $\lim\limits_{t\to 0} \varphi(t) = e^{-1\times(-1)} = e$

φ est donc prolongeable par continuité en 0 avec $\varphi(0) = e$.

24) Montrons par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}_n : |b_n| \leqslant 1$.

- Initialisation : Pour $n = 0$, $|b_0| = 1 \leqslant 1$, d'où $\mathscr{P}_0$.

- Itération : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathscr{P}_k$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $|b_k| \leqslant 1$.

  Alors,

$$\begin{aligned}
|b_n| &= \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} b_{n-k}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{k+1}}_{\leqslant \frac{1}{2}} \underbrace{|b_{n-k}|}_{\leqslant 1} \\
&\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \\
&\leqslant \frac{1}{n} \times \frac{n}{2} \\
&\leqslant \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

  On a bien : $|b_n| \leqslant 1$

  D'où $\mathscr{P}_n$.

- Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |b_n| \leqslant 1}$$

Ainsi, comme $\sum\limits_{k\geqslant 0} x^k$ admet un rayon de convergence de 1, alors par comparaison, si on note R le rayon de convergence de $\sum\limits_{k\geqslant 0} b_k x^k$, il en découle :

$$\boxed{\mathrm{R} \geqslant 1}$$

25) Tout d'abord, φ est $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[\setminus\{0\}$ par composition.

De plus, lorsque $t \longrightarrow 0$:

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= e^{(t-1)\frac{-t-\frac{t^2}{2}+o\left(t^2\right)}{t}} \\
&= e^{(t-1)\left(-1-\frac{t}{2}+o(t)\right)} \\
&= e^{1-\frac{t}{2}+o(t)} \\
&= e \times e^{-\frac{t}{2}+o(t)} \\
&= e\left(1-\frac{t}{2}+o(t)\right)
\end{aligned}$$

D'où : $\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t} = \frac{-\frac{e}{2}t+o(t)}{t}$
$= -\frac{e}{2}+o(1)$

Ainsi :

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t} = -\frac{e}{2}$$

Donc, par le théorème de la limite de la dérivée, φ est $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$ et :

$$\boxed{\varphi'(0) = -\frac{e}{2}}$$

De plus :

$$\begin{aligned}
\forall t\in]-1,1[\setminus\{0\},\ \varphi'(t) &= \left(\frac{1}{t^2}\ln(1-t)-\left(1-\frac{1}{t}\right)\frac{1}{1-t}\right)e^{\left(1-\frac{1}{t}\right)\ln(1-t)}\\
&= \left(-\frac{1}{t^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{n}-\sum_{n=0}^{+\infty}t^n+\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{+\infty}t^n\right)\varphi(t)\\
&= \left(\cancel{-\frac{1}{t}}-\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{t^{n-2}}{n}-\cancel{\sum_{n=0}^{+\infty}t^n}+\cancel{\frac{1}{t}}+\underbrace{\cancel{\sum_{n=1}^{+\infty}t^{n-1}}}_{=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}t^n}\right)\varphi(t)
\end{aligned}$$

$$\text{i.e : } \varphi'(t) = \left(-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n+2}\right)\varphi(t)$$

Par ailleurs, en $t=0$, on a bien : $\varphi'(0) = -\frac{e}{2} = -\frac{1}{2}\varphi(0) = \left(-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{0^n}{n+2}\right)\varphi(0)$

En posant pour tout $t\in]-1,1[$, $\Psi(t) = -\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n+2}$, on obtient le résultat souhaité :

$$\boxed{\forall t\in]-1,1[,\ \varphi'(t) = \varphi(t)\Psi(t)}$$

φ et Ψ étant $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$, alors par produit, φ' est aussi $\mathscr{C}^1$ et donc φ est $\mathscr{C}^2$. Par récurrence immédiate, φ est même $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, alors par la formule de Leibniz :

$$\varphi^{(n)}(0) = \left(\varphi'\right)^{(n-1)}(0) = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\varphi^{(n-k-1)}(0)\Psi^{(k)}(0)$$

Or, pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$\Psi^{(k)}(t) = -\sum_{i=k}^{+\infty}\frac{i(i-1)\cdots(i-k+1)}{i+2}t^{i-k}$$

En particulier :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \Psi^{(k)}(0) = -\frac{k!}{k+2}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi^{(n)}(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!}{k+2}\binom{n-1}{k}\varphi^{(n-k-1)}(0)}$$

26) Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi^{(n)}(0) = -\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(k-1)!}{k+1}\binom{n-1}{k-1}\varphi^{(n-k)}(0)$

De plus, φ est développable en série entière sur $]-1,1[$ par composition car exp et $t \longmapsto \left(1-\frac{1}{t}\right)\ln(1-t) = \ln(1-t) - \frac{\ln(1-t)}{t}$ le sont.

Ainsi, $\forall t \in]-1,1[,\ \varphi(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}t^n$

$$\begin{aligned}
\text{i.e : } \forall t \in]-1,1[,\ \varphi(t) &= \varphi(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)!}{k+1}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\varphi^{(n-k)}(0)\right)t^n \\
&= e + \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}\frac{\varphi^{(n-k)}(0)}{(n-k)!}\right)t^n
\end{aligned}$$

D'où, par unicité du développement en série entière :

$$\begin{cases} -\frac{1}{e}\frac{\varphi^{(0)}(0)}{0!} = -\frac{1}{e}\times e = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\frac{1}{e}\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} = -\frac{1}{n}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\left(-\frac{1}{e}\frac{\varphi^{(n-k)}(0)}{(n-k)!}\right)\right) \end{cases}$$

On en conclut par unicité d'une telle suite :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ -\frac{1}{e}\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} = b_n}$$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} = -eb_n$

Bilan :

$$\boxed{\boxed{\forall t \in]-1,1[,\ \varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}t^n = -e\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n\right) = e\left(1 - \sum_{n=1}^{+\infty} b_n t^n\right)}}$$

27) Sous réserve de convergence,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k c_k\right)^{\frac{1}{n}}\left(\prod_{i=1}^{n} c_i\right)^{-\frac{1}{n}} \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k c_k\right)\left(\prod_{i=1}^{n} c_i\right)^{-\frac{1}{n}} && \text{(d'après l'inégalité arithmético-géométrique)} \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k c_k \cdot \frac{1}{n}\left(\prod_{i=1}^{n} c_i\right)^{-\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

$$\text{i.e : } \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty} a_k c_k \cdot \frac{1}{n}\left(\prod_{i=1}^{n} c_i\right)^{-\frac{1}{n}} \qquad \text{(par permutation de sommes)}$$

Conclusion :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}c_k a_k\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\prod_{i=1}^{n}c_i\right)^{-\frac{1}{n}}}$$

28) Posons $c_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors, d'après 27) :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{\frac{1}{n}} &\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(k+1)^k}{k^{k-1}}a_k\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\underbrace{\prod_{i=1}^{n}\frac{(i+1)^i}{i^{i-1}}}_{\text{téléscopage}}\right)^{-\frac{1}{n}}\\
&\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(k+1)^k}{k^{k-1}}a_k\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n}\left((n+1)^n\right)^{-\frac{1}{n}}\\
&\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(k+1)^k}{k^{k-1}}a_k\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}\\
&\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(k+1)^k}{k^{k-1}}a_k\underbrace{\sum_{n=k}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)}_{\text{téléscopage}}\\
&\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(k+1)^k}{k^{k-1}}a_k\cdot\frac{1}{k}\\
&\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n a_n\\
&\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-n} a_n\\
&\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{1-\frac{1}{\frac{1}{n+1}}} a_n\\
&\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)a_n
\end{aligned}$$

i.e : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}e\left(1-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{b_k}{(n+1)^k}\right)a_n$ (d'après 26))

Bilan final (Inégalité de Carleman-Yang) : Pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à termes strictement positifs telle que $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge, alors :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}e\left(1-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{b_k}{(n+1)^k}\right)a_n}$$

29) Montrons par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathscr{P}_n$: "$b_n > 0$".

- Initialisation : Pour $n = 1$, on a $b_1 = -\frac{1}{e}\varphi'(0) = \frac{1}{2} > 0$ (d'après 25))

  D'où $\mathscr{P}_1$.

- Itération : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathscr{P}_k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

  Alors : $\begin{cases} nb_n = -\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} b_{n-k} = -\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n-k+1} b_k \\ (n+1)b_{n+1} = -\sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k+1} b_{n+1-k} = -\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{n-k+2} b_k \end{cases}$

  On a donc : $$(n+2)(n+1)b_{n+1} - (n+1)nb_n = -\sum_{k=0}^{n} \frac{n+2}{n-k+2} b_k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n+1}{n-k+1} b_k$$
  $$= \sum_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{n+2}{n-k+2} + \frac{n+1}{n-k+1} \right) b_k - \cancel{\frac{n+2}{n+2}} b_0 + \cancel{\frac{n+1}{n+1}} b_0 - \frac{n+2}{2} b_n$$

  De plus : $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $$\frac{n+1}{n-k+1} - \frac{n+2}{n-k+2} = \frac{(n+1)(n+2-k) - (n+2)(n+1-k)}{(n+1-k)(n+2-k)}$$
  $$= \frac{\cancel{(n+1)(n+2)} - k(n+1) - \cancel{(n+2)(n+1)} + (n+2)k}{(n+1-k)(n+2-k)}$$
  $$= \frac{k}{(n+1-k)(n+2-k)}$$

  i.e : $\frac{n+1}{n-k+1} - \frac{n+2}{n-k+2} > 0$

  On a donc : $(n+2)(n+1)b_{n+1} > (n+1)nb_n - \frac{n+2}{2} b_n = \underbrace{\frac{2n^2 + n - 2}{2}}_{>0} \underbrace{b_n}_{>0} > 0$

  Autrement dit $b_{n+1} > 0$.

  D'où $\mathscr{P}_{n+1}$.

- Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n > 0}$$

Ainsi, soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite à termes strictement positifs telle que $\sum\limits_{n \geqslant 1} a_n$ converge, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 - \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{(n+1)^k} < 1$, et donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} a_k \right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} e \left(1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{(n+1)^k} \right) a_n < e \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Donc l'inégalité de Carleman-Yang est plus précise que l'inégalité de Carleman.