



Concours 2025

Mines Mathématiques 1 PC/PSI 2025

Corrigé du sujet

Ne pas hésiter à signaler ce que vous pensez être une erreur : contact@optimalsupspe.fr

Préambule

- Ce sujet est commun au PC-PSI.
- La partie I est classique. Des morceaux sont déjà présents dans le sujet Mines PC 2021 Maths 2. Par contre, le sujet mélange fraction rationnelle et polynôme, ce qu'on va éviter.
- Il est important de savoir mener les calculs de la partie IV. On étudie les nilpotents et c'est un thème très classique.
- Le sujet est au final de bonnes difficultés, il y a quelques technicités et balaye bien l'ensemble du programme d'algèbre linéaire de PC-PSI. On attend des candidats d'avoir pu parcourir le sujet jusqu'au moins la partie IV.

Partie I. Polynômes réciproques

1. Supposons que P est réciproque. Notons $Q = \sum_{k=0}^p a_{p-k} X^k$. Alors on l'égalité des fractions rationnelles

$$P(X) = X^p P(1/X) = X^p \sum_{k=0}^p a_k X^{-k} = \sum_{\ell=p-k}^p a_{p-\ell} X^\ell = Q(X) \quad (1)$$

donc $P = Q$ en tant que polynômes : ils sont donc égaux coefficients par coefficients ce qui se traduit par

$$\forall 0 \leq k \leq p, a_k = a_{p-k}.$$

Supposons maintenant que $\forall 0 \leq k \leq p, a_k = a_{p-k}$. Alors on a l'égalité en fractions rationnelles obtenue en (1)

$$\sum_{k=0}^p a_{p-k} X^k = X^p P(1/X)$$

mais alors

$$P(X) = \sum_{k=0}^p a_k X^k = \sum_{k=0}^p a_{p-k} X^k = X^p P(1/X).$$

P est donc réciproque.

2. Notons $Q(X) = \sum_{k=0}^p a_{p-k} X^k$ (mieux vaut écrire comme ceci plutôt que $X^p P(1/X)$ qui est une fraction rationnelle qui s'identifie à un polynôme). Comme P est de degré p , de l'identité $P = a_p \prod_{i=1}^d (X - \lambda_i)^{m_i}$, on tire $p = \deg(P) = \sum_{i=1}^d m_i$. Ainsi, $X^p = \prod_{i=1}^d X^{m_i}$ et on a l'égalité en fractions rationnelles

$$X^p P(1/X) = X^p a_p \prod_{i=1}^d (X^{-1} - \lambda_i)^{m_i} = a_p \prod_{i=1}^d X^{m_i} \prod_{i=1}^d (X^{-1} - \lambda_i)^{m_i} = a_p \prod_{i=1}^d (1 - \lambda_i X)^{m_i}.$$

Ainsi, on a l'égalité des polynômes

$$Q(X) = a_p \prod_{i=1}^d (1 - \lambda_i X)^{m_i}.$$

Maintenant, si P est réciproque, alors on a l'égalité $P = Q$ et par la question 1, $a_0 = a_p \neq 0$ donc P n'admet pas 0 comme racine. Ainsi, $\forall 1 \leq i \leq d, \lambda_i \neq 0$ et les racines de Q sont les $\{1/\lambda_i : i \in \llbracket 1, d \rrbracket\}$ où la multiplicité de λ_i est m_i pour $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$. P égalant Q , elles ont les mêmes racines ce qui conclut.

3. On peut évaluer l'égalité des fractions rationnelles $Q(X) = -X^p Q(1/X)$ en 1 ce qui donne $Q(1) = -Q(1)$ donc $Q(1) = 0$ et 1 est racine du polynôme Q .

Ainsi, $X - 1$ divise Q : il existe donc $P \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ tel que $Q(X) = (X - 1)P(X)$. Or, on a toujours l'égalité en fractions rationnelles

$$Q(X) = -X^p Q(1/X) = -X^p \left(\frac{1}{X} - 1 \right) P(1/X) = (X - 1) X^{p-1} P(1/X) = (X - 1) P(X).$$

Ainsi, on a l'égalité des fractions rationnelles

$$(X - 1)[P(X) - X^{p-1} P(1/X)] = 0.$$

$X - 1$ étant non nul, on a donc

$$P(X) = -X^{p-1} P(1/X)$$

donc soit $p = 1$ et P est constant, soit $p \geq 2$ et P est réciproque.

4. Soit π le produit des racines de R comptées avec multiplicités. Soit A les racines distinctes de R différentes de ± 1 . Alors comme $\frac{1}{a} = a \iff a = \pm 1$, à tout élément a de A , il existe un élément b tel que $a = \frac{1}{b}$. On peut donc ranger les éléments de A par paire et construire A_1, A_2 de sorte que $\forall x \in A_1, \frac{1}{x} \in A_2$ et $A = A_1 \sqcup A_2$. En notant $a_1, \dots, a_k$ les éléments de A_1 de multiplicités $m_1, \dots, m_k$, on a

$$\pi = 1^{\lambda_1} (-1)^{\lambda_{-1}} \prod_{i=1}^k \left(a_i \frac{1}{a_i}\right)^{m_i} \in \pm 1$$

avec λ_1 et λ_{-1} multiplicité de 1 et -1 pour R .

5. Soit $R(X) = c \prod_{i=1}^d (X - z_i)$ avec $c \in \mathbb{C}^*$, $z_1, \dots, z_d$ les racines de R comptées avec multiplicités et d son degré. Comme R admet aussi $1/z_i$ comme racine pour tout $1 \leq i \leq d$, on a

$$R(X) = c \prod_{i=1}^d \left(X - \frac{1}{z_i}\right) = c \prod_{i=1}^d \frac{1}{z_i} \prod_{i=1}^d (z_i X - 1).$$

Or, d'après la question 2, on a l'égalité en fractions rationnelles

$$X^d R(1/X) = c \prod_{i=1}^d (1 - z_i X) = c (-1)^d \prod_{i=1}^d (z_i X - 1) = c (-1)^d \frac{1}{c} \prod_{i=1}^d z_i R(X).$$

Ainsi, $R(X) = (-1)^d X^d R(1/X)$ donc R est réciproque ou antiréciproque.

Partie 2. Le cas diagonalisable

6. On a

$$\det(xI_n - A) = \det\left(xA \left(A^{-1} - \frac{1}{x}I_n\right)\right) = \det(A)x^n \det\left(A^{-1} - \frac{1}{x}I_n\right) = \det(A)(-x)^n \det\left(\frac{1}{x}I_n - A^{-1}\right).$$

On en déduit que $\chi_A(x) = \det(A)(-1)^n x^n \chi_{A^{-1}}(1/x)$ ou encore $x^n \chi_A(1/x) = \det(A)(-1)^n \chi_{A^{-1}}(x)$.

7. Si A est semblable à A^{-1} , alors $\det(A) = \det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ donc $\det(A) \in \pm 1$. Ainsi, on a l'égalité en fraction rationnelle

$$\chi_A(X) = (-1)^n \det(A) X^n \chi_{A^{-1}}(X) = (-1)^n \det(A) X^n \chi_A(X)$$

car si A et B sont semblables, $\chi_A = \chi_B$. Ainsi, $(-1)^n \det(A) \in \pm 1$ donc χ_A est réciproque ou antiréciproque.

8.
 - Si χ_B est réciproque, alors son coefficient dominant (qui est 1) égale $\chi_B(0)$ donc 0 n'est pas valeur propre *i.e.* B est inversible.
 - Si χ_B est antiréciproque, il existe R constant ou réciproque tel que $\chi_B = (X - 1)R$ donc en 0, $R(0)$ étant non nul par ce qui précède, $\chi_B(0) \neq 0$ et on a encore B inversible.

Soit $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $B = PDP^{-1}$ avec D diagonale (possible car B est diagonalisable). Alors $B^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$ puisque B est inversible.

- Si χ_B est réciproque, alors $\chi_B = X^n \chi_B(1/X) = \det(B)(-1)^n \chi_{B^{-1}}(X)$: ainsi, par unitarité du polynôme caractéristique, $\chi_B = \chi_{B^{-1}}$. D et D^{-1} sont alors identiques donc B est semblable à D qui est semblable à B^{-1} . B est semblable à B^{-1} .
- Si χ_B est antiréciproque, alors $\chi_B = -X^n \chi_B(1/X) = \det(B)(-1)^{n+1} \chi_{B^{-1}}(X)$: on montre que χ_B et $\chi_{B^{-1}}$ ont les mêmes racines ce qui conclut de même.

9. L'inverse de B est

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si B et B^{-1} sont semblables, il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $B = PB^{-1}P^{-1}$. Ainsi, $\ker(B - 2I_4) = P \ker(B^{-1} - 2I_4)$ donc $\mathcal{E}_2(B)$ et $\mathcal{E}_2(B^{-1})$ ont la même dimension. Or, il est clair que $B - 2I_4$ est de rang 2 et $B^{-1} - 2I_4$ est de rang 3. Leurs noyaux sont donc de dimension différente : contradiction. Ainsi, B et B^{-1} ne sont pas semblables.

Partie 3. Produit de matrices de symétries

10. Une matrice de symétrie est donc inversible. Un produit de matrices inversibles est inversible donc A est inversible. Par ailleurs, on a $A = S_1 S_2 = S_1 S_2 S_1 S_1$ donc comme $S_1 = S_1^{-1}$, on a A qui est semblable à $S_2 S_1 = A^{-1}$.

11. Soit B semblable à A : on écrit $B = PAP^{-1}$ avec $A = SS'$ avec S, S' deux matrices de symétries. Alors

$$B = PAP^{-1} = PSP^{-1}PS'P^{-1}$$

et PSP^{-1} est une matrice de symétrie (on a $(PSP^{-1})^2 = PSP^{-1}PSP^{-1} = PS^2P^{-1} = PP^{-1} = I_n$). Ainsi, si A est produit de deux matrices de symétries, toute matrice semblable à A l'est aussi.

12. Par produit par blocs,

$$I_{2n} = S_1^2 = \begin{pmatrix} PQ & 0_n \\ 0_n & QP \end{pmatrix}$$

$S_1^2 = I_{2n}$ si, et seulement si $PQ = I_n$ et $QP = I_n$: ainsi, P et Q sont inverses l'une de l'autre. On a de plus

$$S_2 = S_1 A = \begin{pmatrix} 0_n & PC \\ QB & 0 \end{pmatrix}$$

donc $B^2 = I_{2n}$ équivaut à $PCQB = I_n$ et $QBPC = I_n$ donc PC et QB sont inverses l'une de l'autre. En réunissant ces deux conditions, S_1 et S_2 sont des symétries si, et seulement si, $P = Q^{-1}$ et $B^{-1} = PCP^{-1}$.

13. Si C est semblable à B^{-1} , la condition de la question précédente est satisfaite : on a alors $A = S_1 S_2$ avec

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0_n & P \\ P^{-1} & 0_n \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0_n & PC \\ P^{-1}B & 0_n \end{pmatrix}.$$

Partie 4. La matrice $J_n(\lambda)$

On dit qu'une matrice M (resp. un endomorphisme u) est nilpotent d'indice p lorsque $M^p = 0$ et $M^{p-1} \neq 0$ (resp. $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$).

14. Soit $x \in E \setminus \ker(g^{n-1})$ qui est non vide car $g^{n-1} \neq 0$. Soit $\mathcal{B} = \{g^i(x) : 0 \leq i \leq n-1\}$. Montrons que c'est une famille libre. Par cardinalité, ce sera une base.

Soit donc $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ des réels tels que

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i g^i(x) = 0.$$

Soit $A = \{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket : \lambda_i \neq 0\}$. Supposons par l'absurde que A est non vide. Alors A est une partie non vide de $\mathbb{N}$ donc admet un plus petit élément i_0 . On a donc $\lambda_i = 0$ si $i < i_0$ donc

$$\sum_{i=i_0}^{n-1} \lambda_i g^i(x) = 0.$$

On compose par g^{n-i_0-1} . On a alors

$$0 = \sum_{i=i_0}^{n-1} \lambda_i g^{n-i_0+i-1}(x) = \lambda_{i_0} g^{n-i_0+i_0-1}(x) + \sum_{i=i_0+1}^{n-1} \lambda_i \underbrace{g^{n-i_0+i-1}(x)}_{=0} = \lambda_{i_0} g^{n-1}(x).$$

(cela donne 0 car $n - i_0 + i - 1 \geq n$). Comme $g^{n-1}(x) \neq 0$, nécessairement, $\lambda_{i_0} = 0$ donc $i_0 \notin A$. Contradiction. Ainsi, A est vide donc $\mathcal{B}$ est libre. Par dimension, c'est une base.

Notons $\mathcal{B}' = \{g^{n-i}(x) : 1 \leq i \leq n\}$. Alors la matrice dans la base $\mathcal{B}'$ de g est exactement N .

15. Comme N est triangulaire supérieure stricte, $\lambda I_n + N$ est une matrice triangulaire supérieure de diagonale ne contenant que $\lambda \neq 0$: $\lambda I_n + N$ est donc inversible. Le calcul suivant est super classique :

$$I_n = I_n - A^k = (I_n - A) \sum_{i=0}^{k-1} A^i$$

pour A une matrice nilpotente d'indice k . On applique alors le résultat avec $A = \frac{-1}{\lambda} N$ puisque N est nilpotente d'indice n donc

$$(J_n(\lambda))^{-1} = \lambda^{-1} (I_n - A)^{-1} = \lambda^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{\lambda^i} N^i = \lambda^{-1} I_n + N'$$

avec $N' = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^i}{\lambda^{i+1}} N^i$. On peut dessiner cette matrice en remarquant que N^i est la matrice I_n mais la diagonale est décalée vers le haut droit de i .

Elle s'écrit

$$(J_n(\lambda))^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & -\lambda^{-2} & \lambda^{-3} & \cdots & (-1)^{n-1} \lambda^{-n} \\ 0 & \lambda^{-1} & -\lambda^{-2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda^{-3} \\ \vdots & & \ddots & \lambda^{-1} & -\lambda^{-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

16. N' est triangulaire supérieure stricte donc 0 est unique valeur propre de N' . Son polynôme caractéristique est X^n donc par le théorème de Cayley-Hamilton, $(N')^n = 0_n$.

Pour conclure que $J_n(1/\lambda)$ et $(J_n(\lambda))^{-1}$ sont semblables, il faut et suffit que N et N' le sont. On a

$$(N')^{n-1} = \left(\sum_{i=0}^{n-2} \frac{(-1)^{i+1}}{\lambda^{i+2}} N^{i+1} \right)^{n-1} = N^{n-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^{i+1}}{\lambda^{i+2}} N^i \right) = N^{n-1} \left(\frac{-1}{\lambda^2} I_n + P(N) \right)$$

où $P(N)$ est un polynôme en N n'ayant pas de terme constant. Ainsi, $N^n = 0$ entraîne $(N')^{n-1} = \frac{-1}{\lambda^2} N^{n-1}$. On en déduit que $(N')^n = 0_n$, $(N')^{n-1} \neq 0$. Par la question 14, il existe une base dans laquelle, la matrice dans cette base de l'endomorphisme $X \mapsto N'X$ est exactement $N : N'$ et N sont donc semblables.

17. Soit $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. On a

$$s_1^2(P) = s_1(P(-X)) = P(-(-X)) = P(X) ; s_2^2(P) = s_2(P(1-X)) = P(1-(1-X)) = P(X).$$

Ainsi, s_1 et s_2 sont des symétries. Ensuite,

$$s_1 \circ s_2(P) = s_1(P(1-X)) = P(X+1) = (g + \text{Id}_{\mathbb{C}_{n-1}[X]})(P).$$

On a donc

$$s_1 \circ s_2 = g + \text{Id}_{\mathbb{C}_{n-1}[X]}.$$

18. On écrit

$$P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k.$$

Alors

$$P(X+1) = \sum_{k=0}^n a_k (X+1)^k = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} X^\ell = \sum_{\ell=0}^n \left(\sum_{k=\ell}^n \binom{k}{\ell} a_k \right) X^\ell.$$

Ainsi,

$$P(X+1) - P(X) = \sum_{\ell=0}^n \left(\sum_{k=\ell}^n \binom{k}{\ell} a_k - a_\ell \right) X^\ell.$$

Pour $k = n$, le coefficient devant X^n est nul. Pour $k = n-1$, le coefficient devant X^ℓ est

$$\binom{n-1}{n-1} a_{n-1} + \binom{n}{n-1} a_n - a_{n-1} = n a_n.$$

Ainsi, a_n et n étant non nuls, le degré de $g(P)$ est $\deg(P) - 1$.

19. On en déduit par récurrence immédiate que pour tout $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X] \setminus C_k[X]$, $g^k(P)$ est de degré $\deg(P) - k$. Ainsi,

- si P est de degré $n-1$, $g^{n-1}(P)$ est constant donc $g^n(P) = 0$.
- si P est de degré $d < n-1$, $g^{n-1}(P) = g^{n-1-d} g^d(P) \in g^{n-1-d}(\mathbb{C}_0[X]) = \{0\}$.

Ainsi, $g^n = 0$ et $g^{n-1} \neq 0$ (par exemple, non nul pour X^{n-1}). Ainsi, g satisfait les hypothèses de la question 14 : il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la représentation de g dans $\mathcal{B}$ est N . Dans cette même base, on en déduit que $\text{Id} + g$ se représente par $I_n + N$ donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s_1 \circ s_2) = I_n + N = J_n(1).$$

Puisque la représentation matricielle d'une symétrie est elle-même une symétrie, on en déduit que $J_n(1) = S_1 S_2$ où $S_i = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(s_i)$ avec $i \in \{1, 2\}$.

Partie 5. Une caractérisation des matrices semblables à leur inverse

Chaque bloc $J_n(\lambda)$ s'appelle bloc de Jordan. On admet donc dans cette partie de le théorème de réduction de Jordan.

20. A est inversible donc tous les λ_i sont non nuls. Chaque bloc de Jordan est donc inversible et on a

$$(A')^{-1} = \text{diag}(J_{n_1}(\lambda_1)^{-1}, \dots, J_{n_r}(\lambda_r)^{-1}).$$

A est semblable à A' donc il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = P A' P^{-1}$ donc $A^{-1} = P (A')^{-1} P^{-1}$: A^{-1} est semblable à $(A')^{-1}$ ce qui conclut.

21. Comme A et A^{-1} sont semblables, A' et la matrice précédente sont semblables. Au vu de la construction de A' , il existe $E_1, \dots, E_r$ tel que $E = \bigoplus_{i=1}^r E_i$ et on peut trouver une base adaptée à cette décomposition pour trouver A' .

Notons u endomorphisme canoniquement associée à A , $\mathcal{B}' = \biguplus_{i=1}^r \mathcal{B}_i$ adaptée à $E = \bigoplus_{i=1}^r E_i$. C'est la même base qui permet d'écrire que la matrice de u^{-1} dans la base $\mathcal{B}'$ est la matrice obtenue en question 20 au vu des calculs menés en question 20.

En regardant u_{E_i} (resp. $u_{E_i}^{-1}$) induit de u (resp. u^{-1}) sur E_i , on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_i}(u_{E_i}) = J_{n_i}(\lambda_i) ; \text{Mat}_{\mathcal{B}_i}(u_{E_i}^{-1}) = J_{n_i}(1/\lambda_i).$$

Comme u_{E_i} et $u_{E_i}^{-1}$ sont semblables, ils ont le même polynôme caractéristique donc

$$\forall 1 \leq i \leq r, (X - 1/\lambda_i)^{n_i} = (X - \lambda_i)^{n_i}.$$

On évalue en 0 pour obtenir $\lambda_i \in \pm 1$ et ce, pour tout i . Ainsi, chaque bloc de Jordan s'écrit comme un produit de deux symétries, que l'on note $S_{i,1}, S_{i,2}$ pour $J_{n_i}(\lambda_i)$. Construisons $S_j = \text{diag}(S_{1,j}, \dots, S_{r,j})$ pour $j \in \{1, 2\}$. Alors par produit par blocs,

$$\text{diag}(J_{n_1}(\lambda_1), \dots, J_{n_r}(\lambda_r)) = S_1 S_2.$$

Ainsi, A est semblable à $S_1 S_2$. Si P est une matrice de passage convenable, alors $A = P S_1 S_2 P^{-1} = P S_1 P^{-1} P S_2 P^{-1}$ et on a immédiatement $(P S_i P^{-1})^2 = I_n$ pour $i \in \{1, 2\}$.

FIN DU SUJET